

# 1. UNITA' DI MISURA E TEORIA DEGLI ERRORI

## 1.1 Lunghezza, tempo e massa

Le grandezze fisiche vengono solitamente introdotte utilizzando delle definizioni operative, cioè esplicitando lo strumento di misura necessario per determinare il valore numerico della grandezza fisica.

La lunghezza è la grandezza fisica che si misura con un'asta graduata. Nel sistema internazionale di misura, detto MKS, l'unità di misura di lunghezza è il metro, il cui simbolo è m.

Es. La corda è lunga 15 m, cioè 15 metri.

Il tempo è la grandezza fisica che si misura con un orologio. Nel sistema MKS l'unità di misura di tempo è il secondo, il cui simbolo è s.

Es. Egli ha percorso 100 m in 12 s, cioè 100 metri in 12 secondi.

La massa è la grandezza fisica che si misura con una bilancia. Nel sistema MKS l'unità di misura di massa è il chilogrammo, il cui simbolo è kg.

Es. Quel pallone da calcio ha una massa di 0.45 kg, cioè 0.45 chilogrammi.

La lunghezza, il tempo e la massa sono 3 grandezze, dette grandezze fondamentali, perché tramite esse si possono definire tutte le altre grandezze fisiche di interesse per la meccanica, che verranno dette grandezze derivate.

Oss. Altre grandezze fisiche fondamentali sono la temperatura e l'intensità di corrente elettrica.

Spesso si usano multipli e sottomultipli delle 3 grandezze fisiche fondamentali qui introdotte. Per multipli e sottomultipli del metro si usa la seguente notazione:

$$\begin{aligned}1 \text{ Gm} &= 1 \text{ gigametro} = 10^9 \text{ metri} \\1 \text{ Mm} &= 1 \text{ megametro} = 10^6 \text{ metri} \\1 \text{ km} &= 1 \text{ chilometro} = 10^3 \text{ metri} \\1 \text{ dm} &= 1 \text{ decimetro} = 10^{-1} \text{ metri} \\1 \text{ cm} &= 1 \text{ centimetro} = 10^{-2} \text{ metri} \\1 \text{ mm} &= 1 \text{ millimetro} = 10^{-3} \text{ metri} \\1 \mu\text{m} &= 1 \text{ micron} = 10^{-6} \text{ metri} \\1 \text{ nm} &= 1 \text{ nanometro} = 10^{-9} \text{ metri}\end{aligned}$$

Notazioni simili vengono adottate per i multipli e sottomultipli del secondo e del grammo.

Es. La strada è lunga 3 km =  $3 \cdot 10^3$  m, cioè 3000 metri.

Es. Il tempo di decadimento di un elettrone in uno stato eccitato atomico è di circa  $10^{-8}$  s = 10 ns, cioè dieci nanosecondi.

## 1.2 Metodi di misura ed errori di misura

L'operazione di misura consiste nel confrontare la grandezza fisica da misurare con un'unità di misura della stessa tramite uno strumento di misura.

Es. La lunghezza di una corda (grandezza fisica) si può misurare in metri (unità di misura) utilizzando un nastro graduato (strumento di misura).

La misura di una grandezza fisica può essere:

- a) diretta;
- b) indiretta.

In una misura diretta si ottiene il valore numerico della grandezza fisica tramite il confronto con l'unità di misura o tramite l'uso di sistemi tarati.

In una misura indiretta si ottiene il valore numerico della grandezza fisica utilizzando relazioni analitiche note che legano la grandezza fisica che si vuole determinare ad altre grandezze fisiche. La misura diretta sarà allora fatta su queste grandezze.

Il risultato di una singola misura deve fornire:

- i) il valore numerico  $x$  della grandezza fisica misurata;
- ii) l'errore  $\Delta x$  di sensibilità dello strumento sul numero  $x$ ;
- iii) l'unità di misura.

Es. La corda ha una lunghezza di  $2.33 \pm 0.01$  m.

La frase indica che il valore numerico  $x = 2.33$ ,  
l'errore di sensibilità dello strumento è  $\Delta x = 0.01$ ,  
l'unità di misura è il metro.

Nel caso di misure ripetute della stessa grandezza fisica utilizzando lo stesso strumento di misura è probabile ottenere dei numeri che differiscono l'uno dall'altro per meno dell'errore di sensibilità dello strumento.

In effetti questo non succede sempre perché si commettono degli errori accidentali o errori statistici nell'atto di misura. L'errore statistico può dunque essere più grande dell'errore di sensibilità dello strumento.

Il risultato di misure ripetute deve fornire:

- i) il valore medio  $\langle x \rangle$  della grandezza fisica misurata;
- ii) l'errore statistico  $\sigma_x$  della grandezza fisica misurata;
- iii) l'errore  $\Delta x$  di sensibilità dello strumento;
- iv) l'unità di misura.

Date  $N$  determinazioni  $x_1, x_2, \dots, x_N$  di una grandezza fisica a seguito di  $N$  misure, il valor medio è dato da

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N).$$

Lo scarto quadratico medio è definito come

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\langle x \rangle - x_i)^2.$$

Si dimostra che se gli errori sono casuali c'è una probabilità del 99,7% che il valore vero stia nell'intervallo numerico  $[\langle x \rangle - 3\sigma, \langle x \rangle + 3\sigma]$ . Si pone allora come errore statistico (assoluto) il numero  $3\sigma$ .

### 1.3 Esercizi svolti sulle unità di Misura e la teoria degli errori

1. Quanti micron corrispondono a 50 millesimi di centimetro?

Soluzione:

$$\begin{aligned} 50 \text{ millesimi di centimetro} &= 50 \times 10^{-3} \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ cm} \\ &= 5 \times 10^{-2} \times 10^{-2} \text{ m} = 5 \times 10^{-4} \text{ m} = 500 \times 10^{-6} \text{ m} \\ &= 500 \text{ } \mu\text{m} . \end{aligned}$$

2. Un recipiente ha il volume di 4500 litri.

Esprimere il volume in metri cubi.

Soluzione:

$$\begin{aligned} 1 \text{ litro} &= 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\ 4500 \text{ litri} &= 4,5 \times 10^3 \text{ litri} = 4,5 \times 10^3 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 4,5 \text{ m}^3 . \end{aligned}$$

3. Dati i seguenti numeri: 2, 7, 4, 8, 3, 5

calcolare il valore medio.

Soluzione:

i numeri sono 6. Poniamo perciò  $N=6$  ed inoltre

$$x_1=2, \quad x_2=7, \quad x_3=4, \quad x_4=8, \quad x_5=3, \quad x_6=5 .$$

Il valore medio è dato dalla formula

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)$$

e quindi

$$\langle x \rangle = (2 + 7 + 4 + 8 + 3 + 5)/6 = 29/6 = 4,83 .$$

4. Calcolare lo scarto quadratico medio dei numeri dell'esercizio precedente.

Soluzione:

lo scarto quadratico medio è dato dalla formula

$$\sigma^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (\langle x \rangle - x_i)^2 ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= [(4,83 - 2)^2 + (4,83 - 7)^2 + (4,83 - 4)^2 + \\ &\quad (4,83 - 8)^2 + (4,83 - 3)^2 + (4,83 - 5)^2]/5 \\ &= [(2,83)^2 + (3,83)^2 + (0,83)^2 + \\ &\quad (4,83)^2 + (1,83)^2 + (1,83)^2]/5 \\ &= [8,01 + 14,67 + 0,69 + 23,33 + 3,35 + 3,35]/5 \\ &= 53,40/5 = 10,68 . \end{aligned}$$

5. In una esame di fisica il 30% degli studenti ha preso 20/30, il 50% ha preso 25/30 ed i rimanenti 28/30.

Calcolare il voto medio degli studenti.

Soluzione:

$$30\% = 30/100 = 0,3 \text{ con voto } 20$$

$$50\% = 50/100 = 0,5 \text{ con voto } 25$$

$$20\% = 20/100 = 0,2 \text{ con voto } 28$$

Il voto medio si ottiene tramite la seguente media pesata:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= (30 \times 20 + 50 \times 25 + 20 \times 28)/100 = \\ &= (0,3 \times 20 + 0,5 \times 25 + 0,2 \times 28) = \\ &= 6 + 12,5 + 5,4 = 23,9 . \end{aligned}$$

Quindi il voto medio è 23,9/30 .

6. Un litro d'acqua ha la massa di 1 kg.

Determinare la densità dell'acqua.

Soluzione:

la densità  $\rho$  è il rapporto tra la massa ed il volume.

Si ha perciò

$$\rho = (1 \text{ kg}) / (1 \text{ litro}) = (1 \text{ kg}) / (10^{-3} \text{ m}^3) = 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

7. Esprimere in secondi il tempo trascorso dalla nascita di Cristo all'anno 2000 (trascurando gli anni bisestili).

Soluzione:

$$\begin{aligned} 2000 \text{ anni} &= 2 \times 10^3 \text{ anni} = 2 \times 10^3 \times 365 \text{ giorni} \\ &= 2 \times 10^3 \times 3,65 \times 10^2 \times 24 \text{ ore} \\ &= 2 \times 3,65 \times 10^5 \times 24 \times 3600 \text{ s} \\ &= 7,2 \times 10^6 \times 2,4 \times 3,6 \times 10^3 \text{ s} \\ &= 7,2 \times 2,4 \times 3,6 \times 10^9 \text{ s} \\ &= 6,23 \times 10^{10} \text{ s}. \end{aligned}$$

8. Una superficie di forma quadrata ha un lato di 0,2 dm.

Esprimere l'area della superficie in  $\text{cm}^2$ .

Soluzione:

$$\begin{aligned} 0,2 \text{ dm} &= 2 \text{ cm} \text{ perciò l'area } A \text{ risulta data da} \\ A &= (2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

9. Se 3 persone hanno 5 euro ed altre 4 persone hanno 10 euro, qual è la quantità media di denaro di questo gruppo di 7 persone?

Soluzione:

la quantità totale di denaro  $D$  del gruppo è

$$D = 3 \times 5 \text{ euro} + 4 \times 10 \text{ euro} = 15 \text{ euro} + 40 \text{ euro} = 55 \text{ euro.}$$

La quantità media di denaro  $d$  del gruppo risulta allora

$$d = D/7 = 55 \text{ euro}/7 = 7,86 \text{ euro.}$$