

## 6. FLUIDODINAMICA

### 6.1 Densità

I principali stati di aggregazione della materia sono:

- a) solido;
- b) liquido;
- c) gassoso.

I solidi, i liquidi ed i gas sono costituiti da molecole ed atomi. La distanza media tra le particelle è però così piccola ( $10^{-8}$  m) che questi materiali possono per molte applicazioni essere trattati come sistemi continui.

Detto  $dV$  un volume infinitesimo (volumetto) di materia esso avrà una massa infinitesima  $dm$  ed una densità di massa  $\rho$  data da

$$\rho = \frac{dm}{dV} .$$

Se il materiale è omogeneo, la densità di massa  $\rho$  è costante e la massa totale  $m$  del materiale di volume  $V$  è data da

$$m = \rho V .$$

sostanza	densità (kg/m <sup>3</sup> )
acqua	1000
aceto	900
alcol	790
glicerina	1260
mercurio	13550

Un fluido è un materiale che non ha forma propria. Può essere:

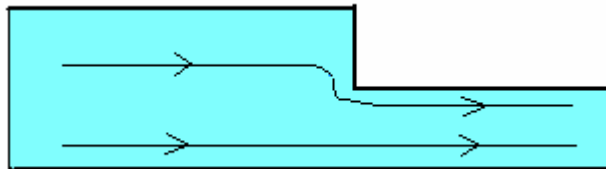
- i) comprimibile: densità non costante (solitamente un gas);
- ii) incomprimibile: densità costante (solitamente un liquido).

## 6.2 Conservazione della portata

Ogni volumetto di fluido ha una densità  $\rho$  ed una velocità di propagazione  $\vec{v}$ . Perciò un fluido è dotato di una densità e di una velocità che sono funzioni delle coordinate spaziali e, in generale, anche del tempo.

Il fluido è detto stazionario quando la densità e la velocità non dipendono dal tempo.

In un tubo ogni volumetto di fluido segue una traiettoria che, nel regime stazionario è detta linea di flusso.



È possibile dimostrare che se il fluido stazionario si muove dentro un tubo di sezione  $S$ , la grandezza

$$q = \rho v S ,$$

detta portata di massa (kg/s), si conserva nel moto.

Se il fluido è anche incomprimibile (densità costante) allora anche la grandezza

$$Q = v S ,$$

detta portata di volume (m<sup>3</sup>/s), si conserva nel moto.

Es. Se un fluido incomprimibile si muove in regime stazionario in un tubo la cui sezione passa dal valore  $S_1$  al valore  $S_2$  allora la velocità del fluido passa dal valore  $v_1$  al valore  $v_2$ .

Per la conservazione della portata di volume dovrà essere:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 ,$$

formula nota come legge di Leonardo.

## 6.3 Pressione

Le forze di superficie sono le forze interne del materiale fluido, pensate come forze agenti sulla superficie di ogni volumetto a causa dell'azione degli altri volumetti fluidi che lo circondano.

Detta  $\vec{F}^{(s)}$  la forza che agisce perpendicolarmente alla superficie  $S$  di un volumetto di fluido, si chiama pressione l'intensità di questa forza per unità di superficie

$$P = \frac{F^{(s)}}{S} .$$

La pressione si misura nel sistema MKS in Pascal (Pa), dove  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ .

Altre unità di misura della forza per unità di superficie sono:

- atmosfere (atm), dove  $1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,
- Bar (bar), dove  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .
- Torricelli (Torr), dove  $1 \text{ Torr} = 133 \text{ Pa}$ .

Oss. In ambito medico la pressione si misura usualmente in Torr. Il Torr viene anche indicato con mm Hg (millimetri di mercurio), dove  $1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg}$ .

## 6.4 Legge di Stevino

La gravità gioca un ruolo fondamentale sulla pressione di un fluido. Se il fluido è fermo allora dato un punto A del fluido di quota  $z_A$  e pressione  $P_A$  ed un punto B di quota  $z_B$  e pressione  $P_B$ , si trova

$$P_B = P_A + \rho g (z_A - z_B) ,$$

che è la cosiddetta legge di Stevino, dove  $\rho$  è la densità e  $g$  è l'accelerazione di gravità.

In base alla legge di Stevino la pressione del fluido che agisce su un “sub” in immersione aumenta con la profondità di immersione.

Noi viviamo sul fondo di un “mare” d'aria, l'atmosfera, che esercita una pressione

$$P_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr} = 1 \text{ atm.}$$

Questa è la pressione media dell'atmosfera al livello del mare. In alta quota la pressione atmosferica è inferiore (in accordo con la legge di Stevino).

Si chiama pressione relativa  $P_R$  di un fluido la differenza tra la pressione assoluta  $P$  in un fluido e la pressione atmosferica  $P_0$ .

Es. Nell'uomo la pressione media del sangue quando viene pompato dal cuore nell'aorta è di circa

$$P_R = 100 \text{ Torr} = 100 \text{ mm Hg.}$$

Questa è una pressione relativa e ci dice di quanto la pressione sanguigna supera quella atmosferica.

La pressione assoluta del sangue nell'aorta è

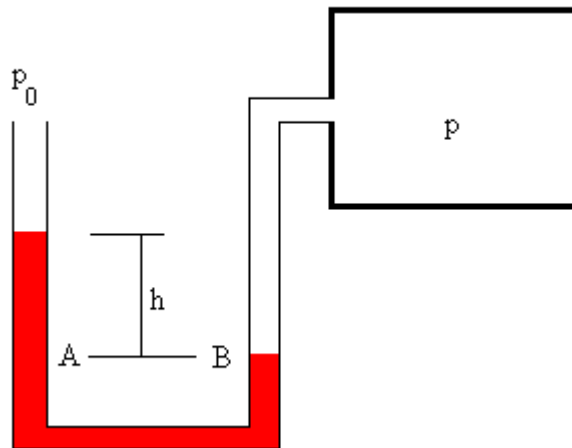
$$P = P_0 + P_R = 100 \text{ Torr} + 760 \text{ Torr} = 860 \text{ Torr} .$$

Oss. La pressione massima (sistolica) è circa 120 Torr e la pressione minima (diastolica) è circa 80 Torr.

## 6.5 Il manometro

La pressione relativa di un fluido (gas o liquido) si può misurare con un dispositivo che prende il nome di manometro.

Es. Il manometro aperto mostrato nella figura sottostante funziona sulla base della legge di Stivino.



Il dislivello  $h$  nella colonnina con liquido di densità  $\rho$  è dato da  $h = (p - p_0)/(\rho g)$ .  $p$  è la pressione del gas nella scatola di destra mentre  $p_0$  è la pressione atmosferica.

In ambito medico, la pressione del sangue viene usualmente misurata con un manometro a mercurio, detto sfigmomanometro.

Il manometro è collegato ad un bracciale che può essere gonfiato con aria per mezzo di una pompa di gomma. Gonfiando il bracciale si può impedire il passaggio del sangue attraverso le arterie del braccio. Il sangue inizia a passare quando la sua pressione sistolica eguaglia quella del bracciale, misurata dal manometro. Usando uno stetoscopio si sente un rumore che termina quando la pressione diastolica del sangue eguaglia quella del bracciale.

## 6.6 Potenza sviluppata dal cuore

Come noto il cuore varia il suo volume  $V$  in modo periodico. Supponiamo, per semplicità, che la variazione di volume  $\Delta V$  avvenga lungo una sola direzione. Avremo allora

$$\Delta V = S \Delta x$$

dove  $S$  è la sezione, che si misura in (metri)<sup>2</sup> e  $\Delta x$  la variazione lineare, che si misura in metri.

Se  $P$  è la pressione sanguigna, allora la forza risulta

$$F = P S .$$

Il lavoro di questa forza sarà

$$L = F \Delta x = F/S S \Delta x = P \Delta V .$$

Per stimare il lavoro fatto nella variazione di volume, prendiamo dei valori tipici per la pressione e la variazione di volume:

$$P = 100 \text{ Torr} = 100 \times 133 \text{ Pa} = 13300 \text{ Pa}$$

$$\Delta V = 100 \text{ cm}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3$$

Si trova allora

$$L = 13300 \text{ Pa} \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 1,33 \text{ Joule} .$$

Nel tempo  $T = 60 \text{ s} = 1 \text{ minuto}$ , vi sono circa  $N = 70$  pulsazioni (cioè variazioni di volume) e quindi il lavoro fatto in un minuto è

$$L_N = N \times L = 70 \times 1,33 \text{ Joule} = 93,1 \text{ Joule} .$$

In definitiva, la potenza media  $P$  del cuore, che è il rapporto tra il lavoro compiuto ed il tempo impiegato a compierlo, risulta:

$$P = L_N/T = 93,1 \text{ J}/60 \text{ s} = 1,55 \text{ Watt} .$$

## 6.7 Spinta di Archimede

Un'altra legge della fluidostatica molto importante è il principio di Archimede:

“un corpo immerso in un fluido subisce una forza verso l'alto pari al peso del fluido spostato applicata al baricentro di tale fluido”.

La forza  $\vec{F}_A$  che agisce verso l'alto è detta spinta di Archimede.

Se un corpo omogeneo di massa  $m$  e volume  $V$  ha densità  $\rho_C$  ed è immerso in un fluido di densità  $\rho_F$ , in base alla legge dinamica di Newton ed al principio di Archimede si ha

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_A = \rho_C V \vec{g} - \rho_F V^{(I)} \vec{g}$$

dove  $V^{(I)}$  è il volume occupato del corpo immerso nel fluido ( $V^{(I)} \leq V$ ). Dunque, se il corpo galleggia ( $a = 0$ ) ne segue che

$$\rho_C V = \rho_F V^{(I)} .$$

## 6.8 Fluido in moto: viscosità

Abbiamo già visto che un corpo che si muove in un fluido è soggetto ad una forza di attrito che è proporzionale alla velocità di propagazione e alla viscosità  $\eta$  del fluido.

La viscosità si misura in Poiseuille (Po), dove  $1 \text{ Po} = 1 \text{ kg}/(\text{m s})$ .

sostanza	Viscosità (Po)
Acqua	0,0010
sangue	0,0040
Olio	0,1130
Glicerina	1,4900
Mercurio	0,0015

Quando il fluido si muove in un condotto la forza di attrito viscoso si oppone allo scorrimento del fluido.

Si trova che per mantenere il fluido in moto a velocità media costante  $v$  (moto stazionario) nel condotto di lunghezza  $L$  e raggio  $R$  deve esserci una differenza di pressione pari a

$$(P_1 - P_2) = \frac{8\eta Lv}{R^2} .$$

Secondo la legge di Leonardo, al variare della sezione  $S$  del condotto la velocità media  $v$  varia ma la portata di volume, data da

$$Q = v S = v \pi R^2$$

rimane costante. In base alla formula precedente essa si scrive

$$Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L}$$

espressione nota come legge di Poiseuille.

Oss. Nel flusso sanguigno la portata è circa  $Q = 8,3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  .

Nell'aorta ( $R=9 \text{ mm}$ ,  $L=23 \text{ cm}$ ) si ha allora

$$v = 0,33 \text{ m/s} , (P_1 - P_2) = 3 \text{ Torr} .$$

## 6.9 Esercizi svolti di fluidodinamica

1. La velocità dell'acqua in un tubo di 6 cm di diametro è 2 m/s. Qual è la velocità in un tubo di 3 cm di diametro che comunica con il precedente?

Soluzione:

posto  $v_1 = 2$  m/s ,  $d_1 = 6$  cm ,  $d_2 = 3$  cm  
ed utilizzando la legge di Leonardo

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

si ha

$$\begin{aligned} v_2 &= (S_1/S_2) v_1 = (\pi (d_1/2)^2 / \pi (d_2/2)^2) v_1 \\ &= (d_1/d_2)^2 v_1 = (6 \text{ cm} / 3 \text{ cm})^2 (2 \text{ m/s}) \\ &= 8 \text{ m/s} . \end{aligned}$$

2. Determinare la densità di massa di una sfera di acciaio omogenea di diametro 0,75 cm e massa 1,765 gr.

Soluzione:

posto  $d = 0,75$  cm e  $M = 1,765$  gr ,  
ed utilizzando la definizione di densità  $\rho$  per un mezzo omogeneo

$$\rho = M/V ,$$

essendo il volume  $V$  dato da

$$V = (4/3) \pi R^3 = (4/3) \pi (d/2)^3 = (1/6) \pi d^3 ,$$

si ha

$$\begin{aligned} \rho &= M / ((1/6) \pi d^3) = 6 M / (\pi d^3) \\ &= 6 \times 1,765 \text{ gr} / (3,14 \times 0,75^3 \text{ cm}^3) = \\ &= 7,99 \text{ gr/cm}^3 . \end{aligned}$$

3. Determinare la densità di un corpo che galleggia in acqua avendo sommerso  $3/4$  del suo volume.

Soluzione:

la densità dell'acqua è  $\rho_a = 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ gr/cm}^3$ .

Detta  $\rho$  la densità del corpo di volume  $V$ , la forza peso agente sul corpo vale

$$F_P = \rho V g \quad \text{dove } g = 9,81 \text{ m/s}^2 .$$

La forza di Archimede verso l'alto risulta invece

$$F_A = \rho_a (3/4) V g .$$

Le due forze devono essere uguali in modulo

$$F_P = F_A \quad \text{da cui} \quad \rho V g = \rho_a (3/4) V g .$$

In definitiva:

$$\rho = (3/4) \rho_a = 750 \text{ Kg/m}^3 .$$

4. Determinare la pressione alla profondità di 40 m al di sotto della superficie di un lago.

Soluzione:

in base alla legge di Stevino si ha

$$P = P_0 + \rho g z ,$$

dove  $P$  è la pressione da determinare,

$P_0 = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pascal}$  è la pressione atmosferica ,

$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  è la densità dell'acqua ,

$z = 40 \text{ m}$  è la profondità .

In definitiva

$$P = 10^5 \text{ Pascal} + 4 \times 10^5 \text{ Pascal} = 5 \times 10^5 \text{ Pascal} .$$