

MATEMATICA. APPELLO DEL 18/06/2010
Laurea in Tecnologie Forestali ed Ambientali, Università di Padova,
a.a. 2009-2010.

Cognome e Nome Firma

Esercizio 1. Calcolare l'area compresa tra le due curve $y = -x^4 + 2$ e $y = x^2$.
Soluzione.

Punti di intersezione tra retta e parabola:

$$x^2 = -x^4 + 2 \quad \text{cioè} \quad x^4 + x^2 - 2 = 0$$

da cui le soluzioni reali:

$$x_1 = -1 \quad \text{ed anche} \quad x_2 = 1.$$

L'area sottesa della quartica

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} (-x^4 + 2) dx = \left[-\frac{x^5}{5} + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{18}{5}.$$

L'area sottesa della parabola risulta:

$$A_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

In definitiva, l'area cercata risulta:

$$A = A_2 - A_1 = \frac{44}{15}.$$

Esercizio 2. Risolvere l'equazione differenziale $f'(x) = x f(x)^2$, con condizione iniziale $f(1) = 2$.

Soluzione.

Dato che $y = f(x)$, l'equazione differenziale si può scrivere come

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \quad \text{cioè} \quad \frac{dy}{y^2} = x dx.$$

Integrando la x nell'intervallo $[1, x]$, e quindi la y nell'intervallo $[2, f(x)]$, si ottiene

$$\int_2^{f(x)} \frac{1}{y^2} dy = \int_1^x x dx,$$

e quindi

$$-\left[\frac{1}{y}\right]_2^{f(x)} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^x,$$

da cui

$$-\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

ed in definitiva

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}.$$

Esercizio 3. Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$.

Soluzione.

Campo di esistenza: $x \neq -1$.

Intersezione con gli assi: $x = 0$ implica $y = -2$; $y = 0$ implica $x = \pm\sqrt{2}$.

Calcolo dei limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty .$$

Calcolo della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} .$$

Ponendo $f'(x) = 0$ si ha

$$x^2 + 2x + 2 = 0 .$$

Ma questa equazione non ha soluzioni, perciò non si sono né massimi né minimi locali.

Il grafico segue immediatamente, ed è molto importante disegnarlo correttamente. La cosa è lasciata allo studente.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale $f''(x) = -4f(x)$, con condizioni iniziali $f(0) = 1$ e $f'(0) = 1$.

Soluzione.

L'equazione si riscrive come

$$f''(x) + 4f(x) = 0 ,$$

ed ammette una soluzione del tipo

$$f(x) = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} ,$$

dove λ_1 e λ_2 sono le soluzioni dell'equazione algebrica

$$\lambda^2 + 4 = 0 .$$

Si ha cioè

$$\lambda_1 = i2 \quad \lambda_2 = -i2 .$$

La funzione diventa

$$f(x) = A e^{i2x} + B e^{-i2x} .$$

Per determinare le costanti A e B struttiamo le condizioni iniziali:

$$1 = f(0) = A + B \quad \text{ed anche} \quad 1 = f'(0) = o2(A - B) .$$

Non è difficile allora trovare che

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i \quad B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i .$$

Perciò si ha

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)e^{i2x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)e^{-i2x} = \frac{1}{2}(e^{i2x} + e^{-i2x}) - \frac{1}{4}i(e^{i2x} - e^{-i2x}) .$$

In definitiva, utilizzando le formule di Eulero, si ottiene

$$f(x) = \cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) .$$